UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA
Année Universitaire 2019-2020

CALCUL DES PROBABILITES COURS ENS : 1

AXIOMES DU CALCUL DES PROBABILITES

I. OBJECTIFS

Considérons par exemple l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé. Si le dé est équilibré pour des raisons de symétrie il y a lieu de considérer que les six résultats 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont équiprobables. Dans ce cas la probabilité de voir apparaître l'un quelconque des six chiffres est de 1/6.
Cet exemple correspond à la situation la plus simple où il est possible, à partir d'événements équiprobables, de se ramener à cette définition :

$$\text{Probabilté d'un événement} = \frac{\text{nombre de cas favorables à cet événement}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

.Cette approche dite « fréquentiste » ne permet pas dans toutes les situations de faire des calculs de probabilité. En effet, pour la plupart des phénomènes aléatoires il n'est pas possible de se ramener à un ensemble d'événements équiprobables, ou de faire des expériences, et il devient impératif **de construire une axiomatique du calcul des probabilités.**

II L'ESSENTIEL A SAVOIR

A. Définition classique probabilité

Considérons une expérience dont l'espace fondamental $\boldsymbol{\Omega}$ compte n épreuves $\omega_1 \ldots . \omega_n$, toutes également équiprobables. Soit A $\subseteq \boldsymbol{\Omega}$ un événement quelconque (rattaché à une expérience) qui peut se produire par la réalisation d'une épreuve parmi m épreuves, m $\leq$ n.

. Définition

Relativement à une expérience aléatoire, la probabilité de l'événement A est le nombre

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

où m est le nombre d'épreuves qui réalisent A et n le nombre total d'épreuves dans l'espace fondamental $\boldsymbol{\Omega}$ rattaché à l'expérience. Ainsi P(A) est le rapport entre le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement A et le nombre de cas possibles, tous cas possibles étant également équiprobable.
Pour calculer la probabilité d'un événement quelconque A, il faut donc déterminer le nombre de

. cas favorables, c'est-à-dire, le nombre d'éléments de l'ensemble des épreuves rattachées à l'événement A,

. cas possibles, c'est-à-dire, le nombre d'éléments de l'ensemble des épreuves rattachées à l'événement certain $\boldsymbol{\Omega}$.

La probabilité P(A) est le rapport de ces deux nombres.
On pourrait aussi écrire

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\boldsymbol{\Omega})}$$

où card(A), card($\boldsymbol{\Omega}$) représentent la cardinalité respective des ensembles A et $\boldsymbol{\Omega}$.

Remarque .
-On peut utiliser cette définition classique ou fréquentiste de probabilité seulement pour les expériences où les événements élémentaires sont équiprobables.
-On dit que les épreuves sont équiprobables, c'est-à-dire que les probabilités des événements élémentaires sont égales.
La probabilité d'un événement élémentaire d'une telle expérience est 1/n (n étant le nombre total d'épreuves). Cette probabilité est la même pour tout événement élémentaire, car le nombre de cas favorables est nécessairement égal à 1.

Exemple.1
Quand on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on présume que les épreuves "pile" et "face" sont également possibles. Dans ce cas les probabilités classiques seraient 1/2 pour les événements élémentaires. On dit que ces événements sont équiprobables.

Exemple. 2
De même, quand on lance un dé bien équilibré, les différents résultats possibles sont tous également probables et les probabilités pour les événements élémentaires sont toutes 1/6.

. Propriétés

En considérant la définition précédente, on constate que la notion de probabilité d'un événement a les propriétés suivantes :

1- P({ω_1}) = P({ω_2}) = …. = P({ω_n}) = $\frac{1}{card(\boldsymbol{\Omega})}$ = $\frac{1}{n}$

2- 0 ≤ P(A) ≤ 1 ; car 0 ≤ m ≤ n

3- P($\boldsymbol{\Omega}$) = 1 **;** car dans cette situation tous les cas sont favorables et ainsi m = n.

4- P(A ∪ B) = P(A) + P(B) si et seulement si A et B sont incompatibles, c'est-à-dire, A ∩ B = ∅.

5- P($\overline{\mathrm{A}}$) = 1 – P(A)

6- P(∅) = 0

7- P(A) ≤ P(B) si A ⊆ B

B. Espace probabilisable

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'ensemble de toutes les épreuves possibles correspondant à une expérience.

Définition 1

On appelle espace d'événements sur $\boldsymbol{\Omega}$ (un ensemble non vide $\alpha \subseteq \boldsymbol{\Omega}$) (où $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega})$ est l'ensemble de tous les sous ensemble de $\boldsymbol{\Omega}$**,** incluant l'ensemble $\boldsymbol{\Omega}$ lui-même et l'ensemble vide), et tel que :

1- A ∈ α implique $\overline{\mathrm{A}}$ ∈ α

2- A et B ∈ α implique A ∪ B ∈ α

Si $\boldsymbol{\Omega}$ est un ensemble fini alors l'ensemble α s'appelle aussi algèbre sur $\boldsymbol{\Omega}$**.**

Remarque

Pour deux événements A et B quelconques d'un espace d'événements α, notons que les sous-ensemble A ∪ B, A ∩ B , A-B, B-A, $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ sont aussi des événements de α**.**

On dit dans ce cas que l'espace d'événements α est fermé par rapport aux opérations respectives.

En particulier, $\boldsymbol{\Omega} \in \alpha$, car si A ∈ α, alors $\overline{\mathrm{A}}$ ∈ α et $\boldsymbol{\Omega}$ = A ∪ $\overline{\mathrm{A}}$ ∈ α**.** Puisque ∅ = $\overline{\boldsymbol{\Omega}}$ il s'ensuit que ∅ ∈ α**.**

Exemple

Pour tout événement $A \subseteq \boldsymbol{\Omega}$, l'ensemble $\{\emptyset, A, \overline{A}, \boldsymbol{\Omega}\}$ est un espace d'événement sur $\boldsymbol{\Omega}$. L'espace d'événements $\{\emptyset, \boldsymbol{\Omega}\}$ s'appelle espace d'événements trivial. De même $(\boldsymbol{\Omega})$ est un espace d'événements sur $\boldsymbol{\Omega}$, appelé espace d'événements discret.

Pour un ensemble fini $\boldsymbol{\Omega}$, on prendra en général $\alpha = \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega})$

Définition 2.

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'ensemble de toutes les épreuves possibles correspondant à une expérience et A un espace d'événements sur $\boldsymbol{\Omega}$. On appelle espace probabilisable le couple $(\boldsymbol{\Omega}, A)$.

C. Les axiomes

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'ensemble fondamental.

L'ensemble des événement associés à Ω est : $\alpha = (\boldsymbol{\Omega})$

α constitue une tribu ou une $\boldsymbol{\sigma}$-algèbre(en clair l'union, l'intersection, ou le complémentaire d'événement de α appartient à α).

. **<u>Axiome 1</u> :** A chaque événement A_i est associé un nombre positif $\mathbf{P}(A_i)$ qui désigne sa probabilité. Selon la terminologie mathématique **P** est application de l'ensemble α dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P} & \\ \alpha & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A_i & \longrightarrow & \mathbf{P}(A_i) \end{array}$$

En Mathématique ceci exprime qu'à chaque événement est associé **une mesure qui est sa probabilité.**

. **<u>Axiome 2</u> : la probabilité de l'événement certain est égal à 1.**

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\Omega}) = 1$$

. **<u>Axiome 3</u>** : **ou axiome des probabilités totales ou d'additivité.**

Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ alors $\mathbf{P}(A_i \cup A_j) = \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(A_j)$

La formule 1 est souvent considéré comme une définition et les axiomes du calcul des probabilités sont constitués des seuls axiomes 2 et 3.

D. Espace probabilisé

Définition

Un espace probabilisé est un triplet $(\boldsymbol{\Omega}, A, \mathbf{P})$, où $(\boldsymbol{\Omega}, A)$ est un espace probabilisable, et **P** est une probabilité sur $(\boldsymbol{\Omega}, A)$.

E. Conséquences immédiates des axiomes

• **P**($\overline{A}$) = 1- **P**(A), $\overline{A}$ étant le complémentaire de A.

La démonstration est très simple, en effet :

$$\boldsymbol{\Omega} = A \cup \overline{A} \quad \text{et} \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Les axiomes 2 et 3 permettent d'écrire :

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1 = \mathbf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A})$$

Dans les applications, il est parfois plus facile de calculer **P**(A) en passant par **P**($\overline{A}$).

• **P**(∅) = 0

En effet, **Ω** = **Ω** ∪ ∅

1 = P(**Ω**) = **P**(**Ω**) + **P**(∅) (axiome 2 et 3)

d'où **P**(∅) = 0

• A ⊂ B ⇒ **P**(A) ≤ **P**(B)

En effet, A ⊂ B ⇒ B = A ∪ (B ∩ $\overline{A}$) (axiome 3)

P(B) = **P**(A) + **P**(B ∩ $\overline{A}$)

comme **P**(B ∩ $\overline{A}$) ≥ 0 (axiome 1)

donc **P**(B) ≥ **P**(A).

Ainsi, ∅ ⊂ A ⊂ Ω , **P**(∅) ≤ **P**(A) ≤ **P**(**Ω**) soit 0 ≤ **P**(A) ≤ 1 .

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.

• **P**(A ∪ B) = **P**(A) + **P**(B) - **P**(A ∩ B)

A et B sont des éléments quelconque de α**,** c'est-à-dire des événement liés à l'expérience.

En effet, A = (A ∩ B) ∪ (A ∩ $\overline{B}$)

Puisque (A ∩ B) ∩ (A ∩ $\overline{B}$) = ∅ , il est possible d'appliquer l'axiome des probabilités totales. Il vient :

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$$
$$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

Ce résultat est conservé pour la fin de la démonstration.

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B \text{ et } (A \cap \overline{B}) \cap B = \emptyset$$

P(A ∪ B) = **P**(A ∩ $\overline{B}$) + **P**(B) ' axiome des probabilités totales)

En remplaçant P(A ∩ $\overline{B}$) par le résultat (1) il vient :

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B)$$
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

Ce résultat est facile à comprendre intuitivement. Si l'on écrit :
$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, la probabilité de $A \cap B$ est mesurée deux fois : une fois avec A, une fois avec B. Il convient donc de retirer $\mathbf{P}(A \cap B)$ qui a été compté deux fois. D'ailleurs si A et B sont incompatibles, $A \cap B = \emptyset$ et on retrouve l'axiome des probabilités totales.

III COMPLEMENTS

A. Généralisation de l'axiome des probabilités

Soient $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_n$, des événements de tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ alors :

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_i \ldots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) \ldots + \mathbf{P}(A_i) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)$$

ou $\mathbf{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbf{P}(A_i)$, propriété de **$\sigma$-additivité**

Exemple

Les éléments ω_i de l'ensemble fondamental **Ω vérifient la propriété de σ additivité.**

Ω = $\{\omega_1, \omega_2, \ \ldots \omega_i \ldots \omega_n\}$

Ω = $\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ \ldots \cup \{\omega_i\} \ldots \cup \{\omega_n\}$

Les événements élémentaires $\{\omega_i\}$ ne font intervenir qu'un seul résultat de l'expérience :

$\{\omega_1\} \cap \{\omega_2\} = \emptyset$ pour $i \neq j$, d'où :

P(Ω) = 1 = $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}(\{\omega_2\}) + \ \ldots + \mathbf{P}(\{\omega_i\}) \ldots + \mathbf{P}(\{\omega_n\})$

La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

Tout événement A lié à l'expérience aléatoires peut s'écrire comme l'union d'événements élémentaires $\{\omega_i\}$ et la connaissance de la probabilité des $\{\omega_i\}$ permet d'obtenir la probabilité de A :

Si **A =** $\{\omega_3\} \cup \{\omega_5\} \cup \{\omega_8\}$

P(Ω) = $\mathbf{P}(\{\omega_3\}) + \mathbf{P}(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}(\{\omega_8\})$

B. Système complet d'événements

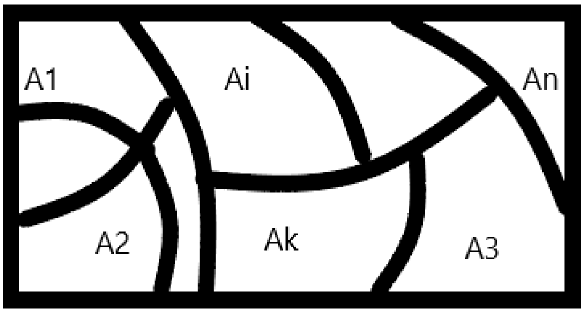
Une suite $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_n$ où les A_i sont inclus dans l'ensemble fondamental, forme un système complet d'événements lorsqu'à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement, et un seul, du système, est réalisé à la fois. On dit que les (A_i) sont 2 à 2 compatibles. **A ce titre, les événements élémentaires forment un système complet d'événements**.

Exemple

Mathématiquement ceci s'exprime ainsi :

$$\text{Si } i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\text{et } A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_i \ldots \cup A_i = \mathbf{\Omega}$$



$$\ldots \cup A_n = \mathbf{\Omega}$$